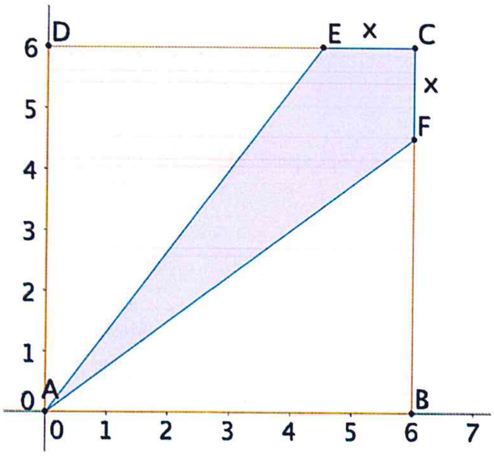
Gymnasium Kirschgarten Maturität 2017 Klassen 5CDEF

Schriftliche Maturprüfung im Grundlagenfach Mathematik

Numerische Resultate sind in vollständig gekürzten Brüchen mit wurzelfreien Nennern oder dezimal auf drei signifikante Ziffern genau anzugeben. Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner TI-30 XII oder ein äquivalentes Modell, Formelsammlung DMK "Begriffe, Formeln, Tafeln". Pro Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden. Ab 50 Punkten wird die Note 6 vergeben. Es wird Wert gelegt auf eine übersichtliche Darstellung. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt.

Aufgabe 1 ($1 + 1 + 3.5 + 1.5 + 3$ Punkte)

Gegeben ist das Quadrat $ABCD$ in der Ebene mit den Eckpunkten $A(0/0)$, $B(6/0)$, $C(6/6)$ und $D(0/6)$. Durch die Wahl von zwei weiteren Punkten E und F auf den Seiten CD resp. BC wird das Quadrat in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke und ein Drachenviereck zerlegt:



a) Wie müssen E und F gewählt werden, damit alle drei Teilstücke gleichen Flächeninhalt besitzen?

b) Konstruieren Sie das Quadrat und die beiden Punkte E und F mit 1 LE =1 cm. Konstruieren Sie anschliessend den Kreis k mit Durchmesser AF und schneiden Sie k mit der Strecke AE. Der im Innern der Strecke AE liegende Schnittpunkt sei T.

c) Berechnen Sie die Seitenlängen, die Winkel und den Flächeninhalt des Dreiecks AFT.

d) Es sei M der Mittelpunkt des Kreises k. Berechnen Sie die Grösse des Winkels $\varphi = \angle(AMD)$.

e) Berechnen Sie den Mittelpunkt M_I und den Radius ϱ_I des Inkreises k_I des Dreiecks AFT.

Aufgabe 2 ($1.5 + 1.5 + 1.5 + 1.5 + 1.5 + 2.5$ Punkte)

Die Punkte $A(9/0/0)$, $B(0/8/0)$, $C(0/0/6)$, $D(9/-2/3)$, E und F sind die Eckpunkte eines schiefen Prismas $\mathcal{P}$ mit Grundfläche ABC und Deckfläche DEF. Die Eckpunkte A und D liegen auf einer Kante des Prismas.

a) Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten der Punkte E und F und zeichnen Sie das Prisma in einem Schrägbild (1 LE = 1 cm, Verzerrungswinkel $\alpha = 45°$, Verkürzungsfaktor $=\frac{1}{2}\sqrt{2}$). Stellen Sie dabei nicht sichtbare Kanten durch gestrichelte Linien dar.

b) Geben Sie für die Grundflächenebene $E_1(ABC)$ und die Deckflächenebene $E_2(DEF)$ jeweils eine Koordinatengleichung mit ganzzahligen Koeffizienten an.

c) Berechnen Sie den spitzen Neigungswinkel φ der Seitenkanten des Prismas gegenüber der Grundfläche ABC und den spitzen Neigungswinkel ψ der Grundfläche ABC gegenüber der $xy-$ Ebene.

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt $I(ABC)$ der Grundfläche ABC und die Höhe h des Prismas.

e) Die Ebenen $G(AEF)$ und $H(BCD)$ schneiden sich im Innern des Prismas in einer Strecke ST. Zeichnen Sie diese im vorhandenen Schrägbild ein und berechnen Sie die Koordinaten der Endpunkte S und T.

f) Die Punkte A, D, S und T spannen eine im Innern des Prismas liegende Pyramide $\mathcal{P}'$ mit Grundfläche ADS und Spitze T auf. Berechnen Sie das Volumen $V(\mathcal{P}')$ dieser Pyramide und bestimmen Sie das Volumenverhältnis $V(\mathcal{P}') : V(\mathcal{P})$ von Pyramide und Prisma.

Aufgabe 3 ($1 + 1.5 + 2 + 1.5 + 1 + 3$ Punkte)

Gegeben ist die Zahlenfolge

$$a_n = \frac{2}{n(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}, \; n \geq 1.$$

a) Berechnen Sie die ersten sieben Glieder dieser Folge.

b) Berechnen Sie die ersten sieben Glieder der zugehörigen Reihe s_n und zeichnen Sie die Punkte (n/s_n) in einem Koordinatensystem ein ($x-$ Achse: $1\,\mathrm{LE} = 1\,\mathrm{cm}$, $y-$ Achse: $1\,\mathrm{LE} = 5\,\mathrm{cm}$).

c) Stellen Sie eine Vermutung für die explizite Darstellung von s_n auf und berechnen Sie damit das Folgenglied s_{15}.

(Falls Sie Teilaufgabe c) nicht lösen können, verwenden Sie im Folgenden $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ *und* $s_n = \frac{n}{2n+1}$.*)*

d) Zeigen Sie, dass die Folge s_n streng monoton wachsend ist.

e) Bestimmen Sie den Grenzwert $s = \lim_{n\to\infty} s_n$.

f) Beweisen Sie die explizite Formel für s_n mit Hilfe der vollständigen Induktion.

Aufgabe 4.1 (3.5 Punkte)

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung einer polynomialen (d.h. ganz - rationalen) Funktion dritten Grades, die die Nullstelle $x_1 = -2$ und den Sattelpunkt $S(3/125)$ besitzt.

Aufgabe 4.2 ($4.5 + 1 + 1$ Punkte)

Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(x^2 - x - 2\right)$ und $F(x) = -3\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 3x + 4)$.

a) Führen Sie für die Funktion f eine Kurvendiskussion durch (Nullstellen, asymptotisches Verhalten, lokale Extrema ohne Abklärung) und skizzieren Sie den Graphen von f für $-1.5 \leq x \leq 15$ und $-4 \leq y \leq 6$ mit $1\,\mathrm{LE} = 1\,\mathrm{cm}$.

b) Zeigen Sie, dass F ein Stammfunktion von f ist.

c) Der Graph von f und die $x-$ Achse schliessen über dem Intervall $[2, \infty[$ ein Flächenstück ein. Berechnen Sie den (endlichen) Inhalt A dieser Fläche.

Aufgabe 5 ($1 + 2 + 2 + 3 + 0.5 + 1.5$ Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 2x^4 - x^3 - 15x^2 + 8x + 20.$$

a) Zeigen Sie, dass der Graph von f die $x-$ Achse an der Stelle $x = 2$ berührt.

b) $x = 2$ ist eine doppelte Nullstelle von $f(x)$. Berechnen Sie die weiteren Nullstellen von f.

c) Bestimmen Sie die Wendepunkte W_1 und W_2 von f.

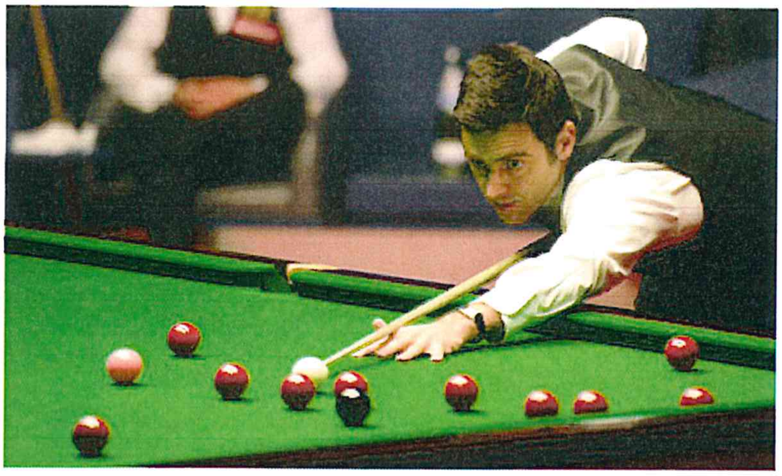
d) Es sei W_1 der Wendepunkt mit negativer $x-$ Koordinate. Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente t_1 in W_1 und berechnen sie den spitzen Schnittwinkel mit der zweiten Wendetangente t_2.

e) Die Funktion $f(x)$ wird zu einer Funktionenschar $f_a(x) = 2x^4 - x^3 - 15x^2 + ax + 20$ mit einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ erweitert. Begründen Sie, wieso die Lage der Wendestellen von f_a nicht von a abhängt.

f) Für welchen Wert von a verläuft die Tangente an der Stelle $x = -1$ durch den Punkt $P(1/43)$?

Aufgabe 6 $(2 + 1 + 1.5 + 1 + 1 + 2 + 1.5$ Punkte)

Snooker ist eine Form des Billardspiels, bei welcher zwei Spieler gegeneinander spielen. Gespielt wird in der Regel über mehrerer Runden (sog. "Frames"), wobei derjenige Spieler gewinnt, der von einer maximalen Anzahl Runden die Mehrheit gewinnt. Bei maximal 9 Runden ("best-of-9") gewinnt beispielsweise derjenige, welcher zuerst fünf Runden für sich entscheiden kann.



(*Ronnie O'Sullivan vs. Mark Selby, 2014; Quelle: www.metro.co.uk*)

In einem Turnier treffen zwei Spieler A und B aufeinander, deren statistische Gewinnwahrscheinlichkeiten pro Runde $p(\text{A gewinnt}) = 0.6$ und $p(\text{B gewinnt}) = 0.4$ betragen.

a) Stellen Sie alle möglichen Spielverläufe eines "best-of-3" - Spiels in einem Baumdiagramm dar. Geben Sie für jedes Endresultat die Wahrscheinlichkeit an, mit welcher es eintritt.

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A ein "best-of-3" - Spiel gewinnt?

c) Spieler A gewinnt ein "best-of-3" - Spiel. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er die erste Runde gewonnen hat?

d) Das Ergebnis BAABA steht für ein "best-of-5" - Spiel, bei welchem Spieler A die zweite, dritte und fünfte Runde (und damit das Spiel) gewinnt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses?

e) Schreiben Sie die Menge $\mathbb{E}$ aller Ergebnisse auf, bei denen Spieler A ein "best-of-5" - Spiel gewinnt.

f) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A ein "best-of-5" - Spiel gewinnt?

g) Bei einem "best-of-7" - Spiel sei der Spielstand nach drei Runden 1 : 2 (zu Gunsten von Spieler B). Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A dieses Spiel trotz des Rückstands noch gewinnt?