Gymnasium Kirschgarten

PhAM-Maturaprüfung 2017

Allgemeine Hinweise:

- Als Hilfsmittel sind erlaubt: - Taschenrechner TI-30X II (oder einfacher), TI-83 oder TI-84,
  - Formelsammlung „Formeln, Tabellen, Begriffe".
- Numerische Resultate sind in gekürzten Brüchen oder dezimal auf 3 signifikante Ziffern genau anzugeben.
- Alle Lösungswege müssen nachvollziehbar und die Antworten begründet sein. Achten Sie auf eine saubere Darstellung und verwenden Sie für jede Hauptaufgabe eigene Blätter (d.h. lösen Sie nicht Teilaufgaben verschiedener Aufgaben auf dem gleichen Blatt).
- Konstruktionen dürfen mit Bleistift/Farbstift ausgeführt werden. Alles andere muss mit Tinte oder Kugelschreiber (kein Frixion!) geschrieben werden.
- Die erreichbaren Punktzahlen sind bei jeder Aufgabe angegeben. Maximal sind 72 Punkte möglich. Die Notenskala ist Note = 1 + Punkte/12, d.h. für die Note 6 sind mindestens 57 Punkte nötig (Note ≤ 6, auf halbe Noten gerundet).

Aufgabe 1: Kegelschnitte (10 Punkte)

a) Konstruieren Sie einen Punkt P auf einer Ellipse, indem Sie die folgenden Anweisungen ausführen: Tragen Sie die Brennpunkte F(–3/0) und M(3/0) ein (2 Häuschen pro Einheit). Ziehen Sie einen Kreis k mit Mittelpunkt M und Radius R = 7.4. Der Punkt Q hat die Koordinaten (–4/2.4). m_c ist die Mittelsenkrechte von QF. $P = m_c \cap QM$. *(1 P)*

b) Zeichnen Sie die Strecke FP ein. Beweisen Sie, dass Q auf k liegt und dass $\overline{FP} + \overline{PM} = R$ gilt. *(2 P)*

c) Beschreiben Sie die Ellipse aus Teilaufgabe a) durch eine Gleichung. Lesen Sie anschliessend die Koordinaten von P aus Ihrer Konstruktion ab und zeigen Sie durch Einsetzen, dass diese Koordinaten Ihre Ellipsengleichung (näherungsweise) erfüllen. *(3 P)*

d) Skizzieren Sie die Figur, welche durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{5.76} - \frac{y^2}{0.2} = 1$$

beschrieben wird. Berechnen Sie die Koordinaten <u>eines</u> Schnittpunkts mit der Ellipse aus Teilaufgabe c).

Hinweis: Falls Sie die Ellipsengleichung aus Teilaufgabe c) nicht herleiten konnten, benutzen Sie die Gleichung $\frac{x^2}{13.76} + \frac{y^2}{4.3} = 1$. *(4 P)*

Aufgabe 2: Komplexe Abbildungen (12 Punkte)

Teil I: Lineare Transformationen

Die drei komplexen Zahlen $z_1 = 5 + 7i$, $z_2 = 8 + 13i$ und $z_3 = -5 + 12i$ bilden in der Gauss'schen Zahlenebene ein Dreieck.

a) Stellen Sie das Dreieck in einem Koordinatensystem dar (reelle Achse von -12 bis 20, imaginäre Achse von -12 bis 14, 1 Häuschen pro Einheit). Berechnen Sie den Schwerpunkt S des Dreiecks und zeichnen Sie auch diesen im Koordinatensystem ein. *(1 P)*

b) Die lineare Abbildung $u(z) = 1.5i\cdot z + 8.5 - 4.5i$ bildet das Dreieck $z_1z_2z_3$ auf das Dreieck $u_1u_2u_3$ ab. Berechnen Sie die Bildpunkte u_1, u_2, u_3 und zeichnen Sie das Bilddreieck ins Koordinatensystem ein. *(1 P)*

c) Das Dreieck $z_1z_2z_3$ soll am Punkt $P = 7 + 8i$ gespiegelt werden. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $v(z)$ dieser Punktspiegelung, berechnen Sie das gespiegelte Dreieck $v_1v_2v_3$ und zeichnen Sie dieses ins Koordinatensystem ein. Beweisen Sie anschliessend mit Ihrer Funktionsgleichung, dass P ein Fixpunkt der Abbildung $v(z)$ ist! *(2 P)*

d) Die Punkte m_1, m_2, m_3 sind die Mittelpunkte der Seiten im Dreieck $z_1z_2z_3$, wobei m_1 gegenüber der Ecke z_1, m_2 gegenüber der Ecke z_2 und m_3 gegenüber der Ecke z_3 liegt. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $w(z)$, welche die Punkte z_k auf die Punkte m_k abbildet $(k = 1, 2, 3)$. *(1 P)*

e) Berechnen Sie $\dfrac{6+2i}{6-2i}$ ohne TR (mit Lösungsweg). *(1 P)*

Teil II: Inversion am Einheitskreis

a) Nehmen Sie ein A4-Blatt quer und zeichnen Sie ein Koordinatensystem der komplexen Ebene mit dem Ursprung genau in der Mitte des Blattes. Zeichnen Sie in dieses Koordinatensystem den Einheitskreis ein (Radius = 1 Einheit = 10 Häuschen).

Zeichnen Sie das Dreieck ABC mit den Punkten $A = -1.2 - 1.4i$, $B = 2 - i$, $C = 0.2 + 1.4i$ ebenfalls ins Koordinatensystem ein. Auf der Seite $b = AC$ befinden sich die vier Punkte $D = -1 - i$, $E = -0.8 - 0.6i$, $F = -0.2 + 0.6i$ und $G = i$, wovon E und G auf dem Einheitskreis liegen. Zeichnen Sie auch diese Punkte ins Koordinatensystem ein. *(1 P)*

b) Die Punkte D, E, F und G werden am Einheitskreis mit der Funktion $w = \frac{1}{z}$ gespiegelt. Konstruieren Sie die Bildpunkte D', E', F' und G'. *(2 P)*

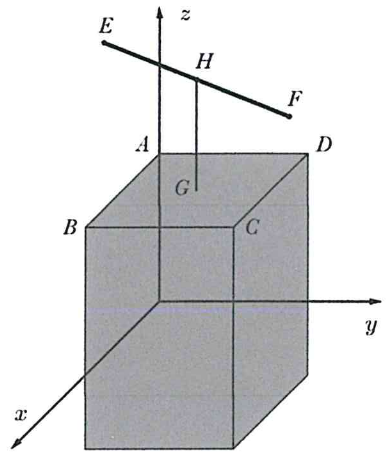
c) Zeigen Sie konstruktiv, dass die vier Bildpunkte D', E', F' und G' auf einem Kreis liegen, d.h. konstruieren Sie einen Kreis durch drei der vier Punkte und prüfen Sie nach, ob der vierte Punkt ebenfalls auf dem Kreis liegt (ohne Beweis, nur durch genaues Konstruieren!). *(1 P)*

d) Die Seiten $a = BC$ und $c = AB$ werden bei der Spiegelung am Einheitskreis ebenfalls auf Kreise abgebildet. Zeichnen Sie die Bildkreise von diesen beiden Seiten ebenfalls in die Figur ein. Es wird keine Konstruktion verlangt, die definierenden Eigenschaften der Bildkreise sollten aber möglichst gut erfüllt sein. *Hinweis:* Die Seite a berührt den Einheitskreis im Punkt $T = 0.8 + 0.6i$. *(2 P)*

Aufgabe 3: Konstruktion eines Schrägbildes (12 Punkte)

Vor einer Hauswand (yz-Ebene) wird ein Fernrohr aufgebaut. Die Achse EF des Fernrohrs wird mit der vertikalen Stange GH über einem Quader mit der Deckfläche ABCD befestigt (→ Figur). Die Grundfläche des Quaders liegt in der xy-Ebene. Die erwähnten Punkte haben die folgenden Koordinaten:

A(4/2/6), B(8/2/6), C(8/6/6), D(4/6/6),
E(8/2.5/11), F(4/5.5/7), G(6/4/6), H(6/4/9).



Das Fernrohr ist direkt auf die Sonne ausgerichtet. Die folgenden Teilaufgaben können auf einem Blatt gelöst werden, dürfen aber auch als Teilkonstruktionen auf verschiedene Blätter verteilt werden.

a) Zeichnen Sie Quader, Stange und Achse des Fernrohrs in einem Schrägbild so, dass die Hauswand als yz-Ebene mit dem Aufriss zusammenfällt. Wählen Sie den Winkel $\alpha = 135°$ zwischen der Darstellung der x-Achse und der y-Achse. Verwenden Sie als Längeneinheit auf der x-Achse eine Häuschendiagonale und auf der y- und z-Achse je zwei Häuschen (Platzbedarf $-5 < y < 12$ und $-7 < z < 17$). *(2 P)*

b) Zeichnen Sie den Grundriss der Fernrohrachse als Grundriss des einfallenden Lichts ein. Konstruieren Sie die Schatten des Quaders und der Stange. Färben Sie die beschatteten Flächen ein (aber nicht zu stark, so dass die Konstruktionswege sichtbar bleiben!). *(4 P)*

c) Konstruieren Sie die wahre Länge der Fernrohrachse $\overline{EF}$ und ihren Winkel zur yz-Ebene. *(2 P)*

d) Nun soll der Quader so geschnitten werden, dass er mitsamt dem Fernrohr auf ein Schrägdach montiert werden kann. Die Schnittebene schneidet die Kanten des Quaders in den Punkten I(8/2/1), J(8/6/3) und K(4/3/6). Zeichnen Sie die Punkte ein und konstruieren Sie die Spuren der Schnittebene in der xy- und xz-Ebene. *(2 P)*

e) Konstruieren Sie die Schnittfigur, welche die Schnittebene beim Schnitt mit der Oberfläche des Quaders erzeugt. *(2P)*

Aufgabe 4: Akustik in einem Raum (12 Punkte)

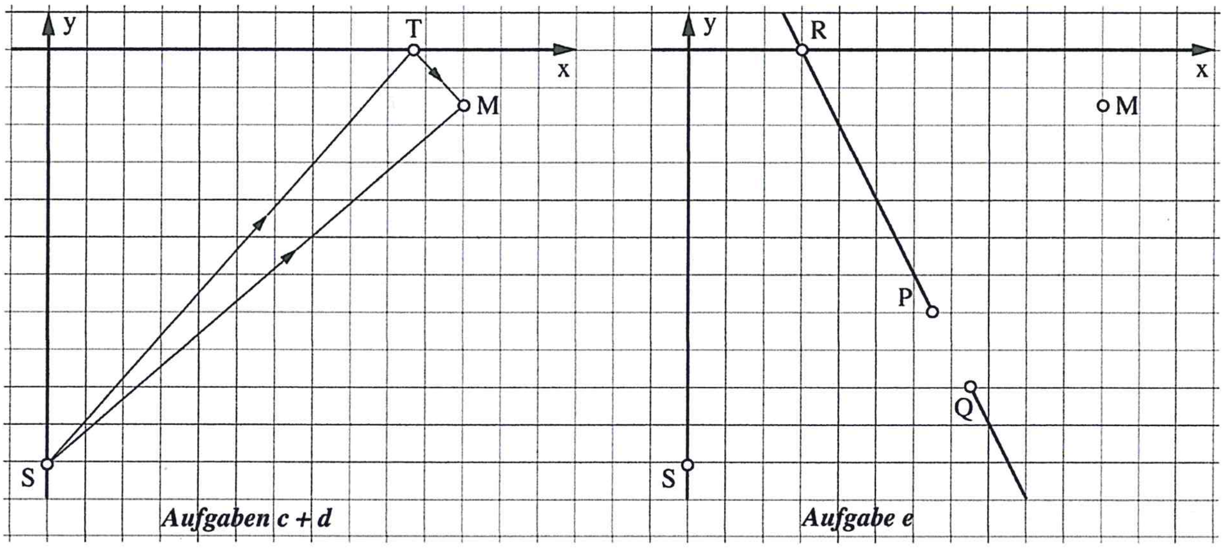
Eine Schallquelle im Punkt S(0/−11.1) (Einheit: 1 Meter) sendet mit der Leistung 17 mW einen Ton mit der Wellenlänge $\lambda = 0.85$ m in den dreidimensionalen Raum. Die Abstrahlung ist omnidirektional, d.h. in jede Richtung gleich. Der Ton wird mit einem omnidirektionalen Mikrofon im Punkt M(11/−1.5) empfangen. Die Schallgeschwindigkeit beträgt c = 340 m/s.

a) Geben Sie den Schallintensitätspegel im Punkt M in dB bezüglich der Hörschwelle bei 1 kHz an. *(2 P)*

b) Die Membran des Mikrofons hat eine Masse von 0.6 g. Berechnen Sie eine geeignete Federkonstante für die Rückstellkraft der Membran, so dass das Mikrofon auf diesen Ton ($\lambda = 0.85$ m) besonders empfindlich reagiert. *(2 P)*

c) In der xz-Ebene liege eine unendlich grosse Wand, welche Schallquellen ohne Verlust und ohne Phasenverschiebung reflektiert (→ Figur links). Berechnen Sie unter Berücksichtigung von Reflexionen und Interferenz die resultierende Schalldruck-Amplitude im Punkt M.

Hinweis: Die Schalldruck-Amplitude p und die Schallintensität J hängen über die Beziehung $J = \frac{p^2}{\rho \cdot c}$ zusammen, wobei mit der Luftdichte $\rho = 1.293$ kg/m^3 gerechnet werden soll. *(4 P)*

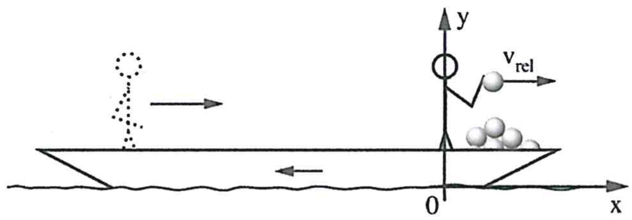


d) Aufgrund der Figur kann man annehmen, der reflektierte Pfad TM stehe (praktisch) senkrecht zum direkten Pfad SM. Das Mikrofon wird jetzt längs des direkten Pfads SM periodisch hin und her bewegt. Mit welcher Geschwindigkeit muss sich das Mikrofon Richtung S bewegen, damit der Frequenzunterschied zwischen dem direkten und dem reflektierten Ton genau 2 Hz beträgt? *(2 P)*

e) Nun wird die reflektierende Wand um eine vertikale Achse durch den Punkt R(3/0) soweit gedreht, dass die Wand auch durch die Punkte P(6.5/−7) und Q(7.5/−9) verläuft (→ Figur rechts). Ein durch die Vertikalen durch P und Q begrenzter Spalt wird aus der Wand ausgeschnitten. Obwohl nun kein direkter oder reflektierter Pfad vom Sender zum Mikrofon besteht, empfängt das Mikrofon dennoch ein Signal. Zeigen Sie, dass das Mikrofon in der Nähe eines Nebenmaximums liegt. *(2 P)*

Aufgabe 5: Boot mit Kugelantrieb (12 Punkte)

Die nebenstehende Figur zeigt ein Boot mit einer Person darin, die sich am Anfang am linken Ende des Bootes befindet. Am rechten Ende befindet sich ein Haufen Kugeln aus Beton. Das Boot schwimmt in einem See mit ruhendem Wasser. Am Anfang ist das Boot ebenfalls in Ruhe (relativ zum Wasser). Die Massen der einzelnen Teilkörper sind:



$m_B = 40$ kg (Boot), $m_P = 80$ kg (Person), $m_K = 6.0$ kg (1 von total 10 Kugeln).

a) Die Person bewegt sich nach rechts zum Kugelhaufen, und zwar um $s = 3.6$ m (relativ zum Boot). Dabei bewegt sich das Boot relativ zum Wasser etwas nach links. Warum? Erklären Sie in wenigen Sätzen und achten Sie darauf, dass Sie die relevanten physikalischen Begriffe korrekt und präzis verwenden. *(1 P)*

b) Um welche Strecke Δs bewegt sich das Boot nach links (relativ zum Wasser)? *(2 P)*

Am rechten Ende angekommen wartet die Person einen Moment, bis das Boot wieder ganz zur Ruhe gekommen ist. Jetzt befindet sie sich im Ursprung des eingezeichneten Koordinatensystems, das *relativ zum Wasser ruht.* Alle folgenden Fragen beziehen sich auf dieses ruhende Koordinatensystem (→ Figur).

c) Die Person nimmt die erste Kugel und wirft sie mit $v_K = 5.0$ m/s *relativ zum Wasser* horizontal aus dem Boot. Welche Geschwindigkeit erreicht dadurch das Boot (relativ zum Wasser, ohne Reibung)? *(1 P)*

d) Die Person von Teilaufgabe c) lässt die Kugel beim Abwurf im Punkt (0.4/1.6) los (Einheit: 1 Meter). An welcher Stelle x trifft die Kugel ins Wasser? *(2 P)*

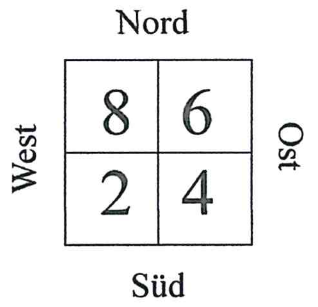
e) Beim Abwurf wird die Kugel längs der horizontalen Strecke $b = 0.4$ m gleichmässig von Null auf die Geschwindigkeit $v_K = 5$ m/s beschleunigt.
   i) Wie gross ist die dafür benötigte Kraft? *(1 P)*
   ii) Wie gross ist die mittlere Leistung der Armmuskulatur beim Abwurf einer Kugel? *(1 P)*

f) Wie lautet die Antwort auf c), wenn die Kugel so geworfen wird, dass sie nach dem Abwurf die Geschwindigkeit $v_{rel} = 5.0$ m/s *relativ zum Boot* hat? *(2 P)*

g) Was passiert bei diesem gesamten Vorgang theoretisch mit dem Wasserspiegel des Sees: steigt er, sinkt er oder bleibt er gleich? Begründen Sie Ihre Antwort auf die gleiche Art wie in Aufgabe a). *(2 P)*

Aufgabe 6: Optimale Baustrategie (14 Punkte)

Ein Bauland in der Industriezone besteht aus vier Parzellen. Für eine Firma ermöglichen die vier Parzellen verschiedene jährliche Gewinne, welche wir in "Gewinneinheiten" angeben. In der nebenstehenden Figur ist die Anzahl der erzielbaren Gewinneinheiten für jede Parzelle angeschrieben. Wichtig ist, dass eine Firma eine zusätzliche Gewinneinheit realisieren kann, wenn sie zwei Parzellen besitzt, die ihr Zugang zu allen vier Himmelsrichtungen ermöglichen. Zwei Beispiele: Wenn eine Firma die nordwestliche und die südöstliche Parzelle besitzt, kann sie einen Gewinn von 8 + 4 + 1 = 13 erzielen. Wenn sie die nordwestliche und die nordöstliche Parzelle besitzt, einen Gewinn von 8 + 6 = 14.



a) Zwei Firmen A und B vereinbaren, das Bauland folgendermassen aufzuteilen: Firma A wählt zuerst eine der beiden südlichen Parzellen. Dann wählt Firma B eine der beiden westlichen Parzellen. Dann wählt Firma A ihre zweite Parzelle. Die übrigbleibende Parzelle geht an Firma B. Stellen Sie diesen Prozess als Spielbaum dar und beschriften Sie seine Blätter mit den Gewinnen für beide Firmen. *(2 P)*

b) Wir nehmen an, dass die Firmen keine weitergehenden Vereinbarungen treffen und ihren eigenen Gewinn maximieren. Zeichnen Sie die beste Strategie für Firma A als Entscheidungsbaum. Zeichnen Sie auch die beste Strategie für Firma B als Entscheidungsbaum (oder kennzeichnen Sie mit eindeutiger Beschriftung/Farbe die Entscheidungsbäume in der Lösung der vorangehenden Teilaufgabe). *(2 P)*

c) Nach dem Ausarbeiten der Strategien schlagen beide Firmen Flexibilität bei genau einer ihrer Entscheidungen vor, falls sie eine Ausgleichszahlung erhielten. Wie lauten die beiden Vorschläge? Mit welchen Gewinnen dürfen die Firmen nach erfolgreichen Verhandlungen rechnen? *(2 P)*

d) Firma A überlegt sich, wie sie ihre zwei Parzellen bebauen kann. Auf einer Parzelle darf die überbaute Fläche 7'000 m^2 nicht übersteigen. Auf der ersten Parzelle darf nur einstöckig gebaut werden. Der Preis pro bebautem Quadratmeter liegt bei 1250 Fr./m^2. Auf der zweiten Parzelle darf zweistöckig gebaut werden, was die nutzbare Bürofläche verdoppelt, aber wegen schwieriger Arbeiten am Fundament 5000 Fr./m^2 kostet. Der Heizenergieverbrauch pro bebautem Quadratmeter liegt auf der ersten Parzelle bei jährlichen 100 kWh/m^2 und auf der zweiten Parzelle bei 150 kWh/m^2. Firma A darf aus dem Fernwärmenetz maximal 1.35 GWh jährlich beziehen. Ausserdem sollen die Baukosten 35 Millionen Fr. nicht übersteigen. Zeichnen Sie ein Planungspolygon und berechnen sie, wie viele Quadratmeter Firma A auf jeder Parzelle überbaut, wenn sie die Bürofläche optimiert. *(4 P)*

e) Schon bald zeigt sich bei Firma A ein Parkplatzproblem und es werden Parkgebühren von 10 Fr. pro Tag eingeführt. Es gibt nun Schlaumeier, welche an zufällig ausgewählten Tagen auf den Gratisparkplätzen der Firma B parkieren. Firma B hat das Problem schnell erkannt und führt nun an zufällig gewählten Tagen Kontrollen durch, die pro kontrolliertem Parkplatz 2 Fr. kosten. Ein ertappter Falschparkierer erhält eine Busse von 30 Fr.. Stellen Sie eine Bi-Matrix auf und berechnen Sie, an wie vielen Tagen eines Monats zu 30 Tagen ein Mitarbeiter der Firma A sein Auto auf dem Gelände der Firma B abstellt, wenn er seine Kosten minimieren will und davon ausgeht, dass Firma B ebenfalls ihren Aufwand für die Kontrollen optimiert. An wie vielen Tagen des Monats sollte in diesem Fall Firma B eine Kontrolle durchführen? *(4 P)*