Erziehungsdepartement des Kantons Basel-Stadt

Mittelschulen und Berufsbildung

▶ **Gymnasium Kirschgarten**

Schwerpunktfach
Physik und Anwendungen der Mathematik
am Gymnasium Kirschgarten

Komplexe Zahlen - PAM Klasse 2

Hintergrund

Das System der Komplexen Zahlen war bereits im 16. Jahrhundert schon bekannt. ***Rafael Bombelli*** (✻1526 Bologna, 1572 Rom) veröffentlichte bereits in seiner 1572 erschienenen Schrift „*Algebra*“ neben den negativen auch die komplexen Zahlen.

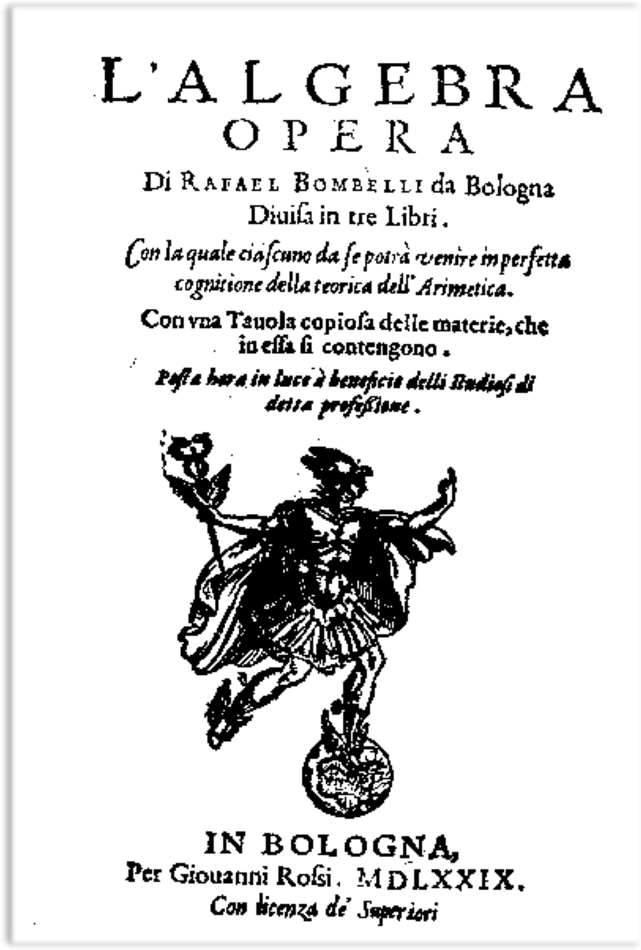
Leibniz und Euler äusserten sich über seine Werke positiv.

Welche Lösungen hat eigentlich die Gleichung

$$x^2+1=0$$

Keine gefunden? – Kein Problem. Rafael Bombelli schlug vor, formal einfach mit dem Ausdruck $i^2=-1$ zu rechnen.

Wir nennen die Zahl i eine imaginäre Zahl.



L'Algebra von Rafael Bombelli
Titelblatt der 2. Auflage von 1579, Bologna

Image: Bedeute Bild, also eine sich vorgestellte Zahl.

Rechnen mit komplexen Zahlen

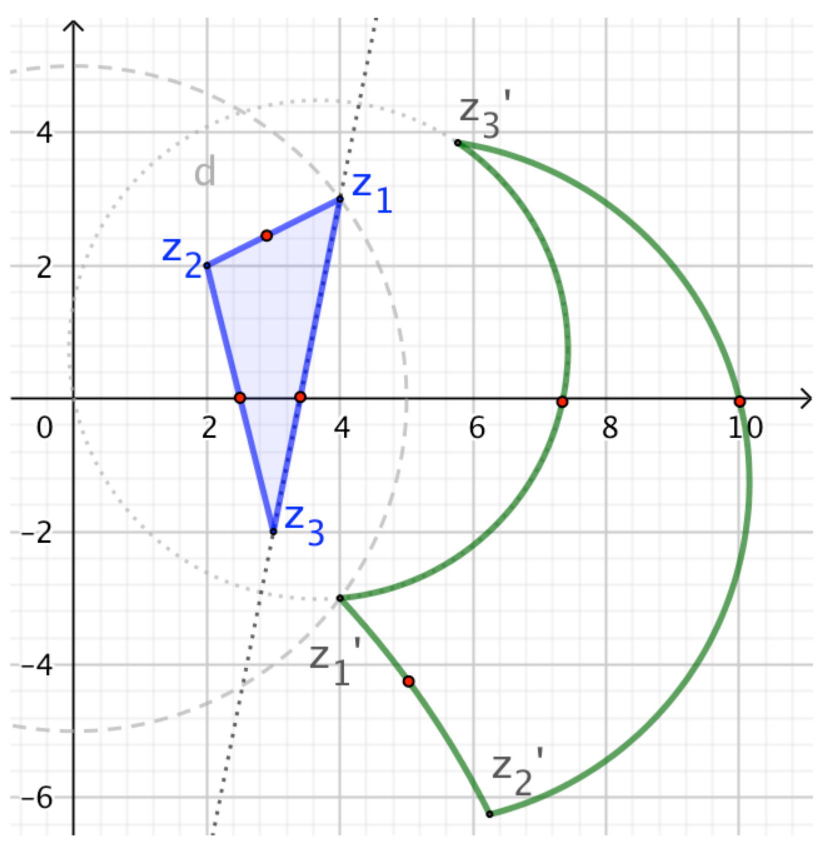
In den komplexen Zahlen kann man fast wie gewohnt rechnen. Eine Zahl besteht jetzt aber aus einem Real- und Imaginärteil, z.B. $z=2+3i$

- z.B. $(2+3i)+(1+i)=3+4i$?
- oder $$\begin{aligned}(4+3i)^2 &= (4+3i)(4+3i)\\ &= 16+24i+9i^2\\ &= 7+24i\end{aligned}$$

Gibt es auch eine geometrische Interpretation der Zahlen?

Komplexe Abbildungen

Berechnet man z.B. für alle Punkte z des blauen Dreiecks mit den Ecken $z_1 = 4+3i$, $z_2 = 2+2i$ und $z_3 = 3-2i$ die Zahlen $25/z$, so erhält man das eigenartig verzerrte krummlinige Dreieck (grün).



Mit komplexen Abbildungen kann man erstaunliches schaffen. Geraden werden auf Kreise abgebildet etc. Dadurch entsteht eine ganz neue Art der Geometrie.

Wo zu brauch man das?

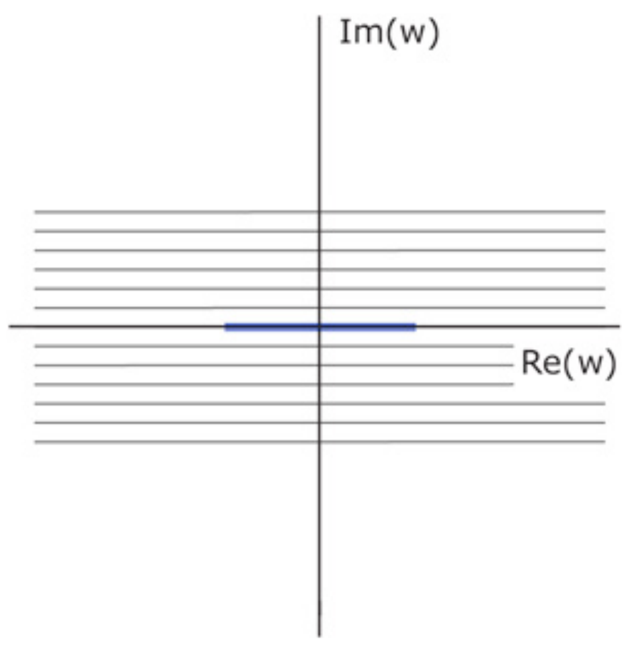
In der Mathematik hat eine von Einschränkungen befreite exakte Denkweise immer wieder zu unerwarteten praktischen Anwendungen geführt!

Man verwendet komplexe Zahlen beim Lösen von Differenzialgleichungen wie auch bei Anwendungen in der Elektrotechnik oder wie im folgenden Beispiel.

Anwendung: Die Aerodynamik eines Flügelprofils

Die laminare Strömung um ein Hindernis kann man im Prinzip nur mit sehr komplizierten physikalischen Gleichungen lösen. Man hat aber mathematisch Folgendes bewiesen:

Wenn man z.B. die Strömung um das blaue Dreieck (in der Abbildung unten links) kennt, so müsste man nur die Strömungslinien mit derselben komplexen Funktion $25/z$ abbilden, um direkt die Strömungslinien um das grüne Dreieck zu erhalten!



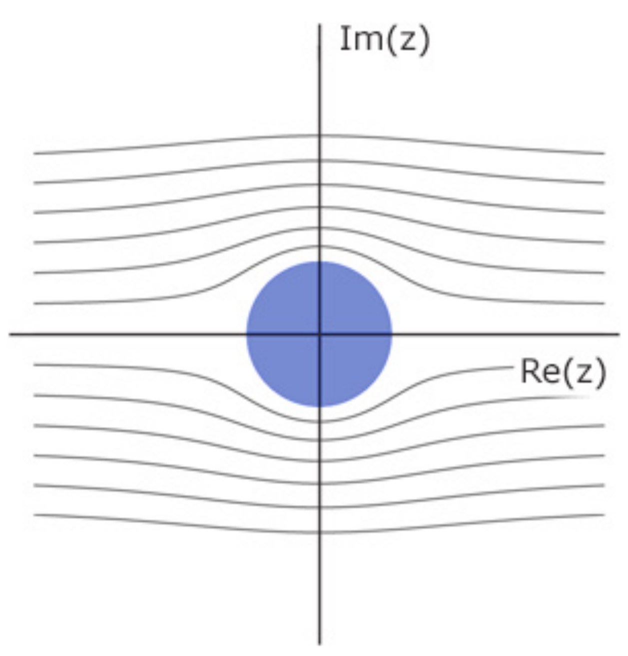
Die Joukowski-Funktion

$$w = 0.5\cdot(z+1/z)$$

bildet einen Kreis auf eine Strecke ab.

Die Strömungslinien neben einer Strecke sind schnell gezeichnet (links).

Mit der Joukowski-Funktion rückwärts angewandt erhält man daraus die Strömungslinien um den Kreis (rechts).



Vergrössert und verschiebt man dieses Bild ein wenig und wendet nochmals die Funktion an, so erhält man aus dem Kreis das Profil eines Flugzeugflügels, sowie alle gesuchten Strömungslinien darum herum.